میانگین‌پذیری و فشرده‌سازی نیم‌گروه‌ها

(چاپ دوم)

ترجمه و تألیف

دکتر سید مسعود امینی دکتر علیرضا مدقالچی

معصومه چراغی سیده زهرا رضوی

علی معمار همدانی

۱۳۹۸

عنوان و نام پدیدآور: میانگین‌پذیری و فشرده‌سازی نیم‌گروه‌ها/ نگارندگان سید مسعود امینی... [ودیگران].
مشخصات نشر: تهران: دانشگاه تربیت مدرس، مرکز نشر آثار علمی ، ۱۳۹٤.
مشخصات ظاهری: ل، ۳۱۸ ص.
شابک: 978-600-7589-13-7
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
یادداشت: نگارندگان سید مسعود امینی، علیرضا مدقالچی، معصومه چراغی، سیده زهرا رضوی، علی معمارهمدانی.
یادداشت: کتاب حاضر ترجمه بخش‌هایی از کتاب Banach algebras on semigroups and on their compactifications اثر H G Dales; Anthony To-Ming Lau; Dona Strauss می‌باشد.
یادداشت: کتابنامه: ص.[۳۱٤]-۳۱۸.
موضوع: جبر خطی موضوع: جبر باناخ موضوع: آنالیز تابعی
شناسه افزوده: امینی، سیدمسعود، ۱۳٤٤ - شناسه افزوده: دیلز، هرولد جی.، ۱۹٤٤ -م. شناسه افزوده:Dales, H. G. (Harold G.)
شناسه افزوده: لائو، آنتونی تو- مینگ، ۱۹٤۳ -م. شناسه افزوده: Lau, Anthony To-Ming شناسه افزوده: استراوس، دانا، ۱۹۳٤ -م.
شناسه افزوده: Strauss, Dona شناسه افزوده: دانشگاه تربیت مدرس. مرکز نشر آثار علمی
رده بندی کنگره: ۱۳۹٤ ۹م/ ۲/ ۱۸٤ QA
رده بندی دیویی: ۵۱۲/۵
شماره کتابشناسی ملی: ٤۰۱۲۹۱۰

میانگین‌پذیری و فشرده‌سازی نیم‌گروه‌ها

ترجمه و تألیف: دکتر سید مسعود امینی، دکتر علیرضا مدقالچی، معصومه چراغی، سیده زهرا رضوی، علی معمار همدانی
ویراستار ادبی: عرفانه خوئینیها
طراح جلد: ترنج
حروفچینی: فرشته نجفی
شماره انتشار: ۱۸۸
شماره پیاپی: ۳۸۳
تاریخ انتشار: ۱۳۹۸
شمارگان: ۵۰۰
شابک: ۷-۱۳-۷۵۸۹-۶۰۰-۹۷۸ **شابک الکترونیکی:** ۸-۰۷-۸۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
ناشر: انتشارات دانشگاه تربیت مدرّس
نوبت چاپ: دوم
کارشناس اجرایی: فریبا کرمانی
ناظر چاپ: مصطفی جانجانی
لیتوگرافی: ایران گرافیک
چاپ و صحافی: کتاب شمس
مرکز پخش: تقاطع بزرگراه‌های آلاحمد و دکتر چمران،انتشارات
دانشگاه تربیت مدرّس، صندوق پستی: ۳۱۸-۱٤۱۱۵
تلفن: ۸۲۸۸۳۰۹٦ **دورنگار:** ۸۲۸۸۳۰۳۲ **آدرس اینترنتی**
فروش: pub.modares.ac.ir

صحت مطالب کتاب بر عهدهٔ نگارندگان است.

تمام حقوق این اثر برای مرکز نشر آثار علمی دانشگاه تربیت مدرس محفوظ است و تکثیر کتاب به هر روشی بدون اجازه کتبی ناشر موجب پیگرد قانونی می‌شود.

تقدیم به:

خانواده‌های عزیزمان

فهرست مطالب

پیشگفتار چاپ دوم ..... **ه**
پیشگفتار چاپ اول ..... **ز**

فصل ۱- مقدمات **۱**
۱-۱ گروه‌ها ۱
۱-۲ فضاهای باناخ ٤
۱-۳ جبرهای باناخ ۷
۱-٤ میانگین‌پذیری جبرهای باناخ ۱٦
۱-۵ دوگان دوم جبرهای باناخ ۳۳
۱-٦ $L^1(G)$ و نمایش‌های یکانی ۳۵

فصل ۲- نیم‌گروه‌ها **۳۹**
۲-۱ تعریف‌های اساسی ۳۹
۲-۲ نیم‌گروه‌های منظم و وارون ٦۰
۲-۳ نیم‌گروه‌های کاملاً ۰- ساده ٦٦
۲-٤ نیم‌گروه‌های ریس ۷۳
۲-۵ نیم‌گروه‌های حذفی ۷۹
۲-٦ زیرمجموعه‌های تقریباً جدا از هم چپ ۸۷
۲-۷ نیم‌گروه‌های توپولوژیک ۹۱

۲–۸ مشخصه‌ها و نیم‌مشخصه‌ها ۹۷
۲–۹ مثال‌ها ۱۰۰

فصل ۳– جبرهای نیم‌گروهی $\ell^1(\mathbf{S})$ و فضای مشخصه‌های آن ۱۰۹
۳–۱ تعاریف و گزاره‌های پایه‌ای ۱۰۹
۳–۲ هم‌ریختی‌ها و فضای مشخصه‌های $\ell^1(S)$ ۱۲۰
۳–۳ تبدیل فوریه $\ell^1(S)$ ۱۳۰

فصل ۴– عمل روی مدول‌های دوگان و جبر نیم‌گروهی ریس ۱۳۹
۴–۱ عمل روی مدول‌های دوگان ۱۳۹
۴–۲ جبر نیم‌گروهی ریس ۱۵۲

فصل ۵– فشرده‌سازی نیم‌گروه‌های نیم‌توپولوژیک ۱۶۷
۵–۱ فشرده‌سازی نیم‌گروهی ۱۶۷
۵–۲ حاصل‌ضرب زیرمستقیم فشرده‌سازی‌ها ۱۷۳
۵–۳ P– فشرده‌سازی جهانی ۱۷۸

فصل ۶– نیم‌گروه $\boldsymbol{\beta S}$ ۱۸۵
۶–۱ فرافیلتر ۱۸۸
۶–۲ نیم‌گروه $(\beta S, \square)$ ۱۹۳
۶–۳ مرکز توپولوژیک نیم‌گروه βS ۲۰۵

فصل ۷– فضاهای وابسته و فشرده‌سازی ۲۰۹
۷–۱ فضاهای درونی ۲۰۹
۷–۲ فضای توابع تقریباً متناوب (ضعیف) بر نیم‌گروه S ۲۱۴
۷–۳ فضای توابع $WAP(G)$، $AP(G)$، $LUC(G)$ و $RUC(G)$ ۲۲۰
۷–۴ معرفی برخی فضاهای دیگر ۲۲۵
۷–۴–۱ توابع تقریباً متناوب قوی $SAP(S)$ ۲۲۶
۷–۴–۲ توابع نرم پیوسته چپ $LC(S)$ ۲۲۶

۷-۴-۳ توابع به‌طور ضربی پیوسته چپ $LMC(S)$ و توابع به‌طور ضربی ضعیف پیوسته چپ $WLC(S)$ ۲۲۶
۷-۴-۴ توابع دور از مرکز $D(S)$ ۲۲۷
۷-۴-۵ توابع تقریباً خودریخت $AA(S)$ ۲۲۷
۷-۴-۶ توابع مینیمال $MIN(S)$ ۲۲۷
۷-۴-۷ توابع دورازمرکز نقطه‌ای $PD(S)$ ۲۲۸
۷-۴-۸ توابع تقریباً متناوب بور $BAP(S)$ ۲۲۸
۷-۵ روابط میان فضاها ۲۲۸

فصل ۸- میانگین روی نیم‌گروه‌ها ۲۳۱
۸-۱ میانگین‌پذیری نیم‌گروه ۲۳۱
۸-۲ محمل میانگین‌ها ۲۵۳
۸-۳ میانگین $M(\beta S)$ ۲۶۱

فصل ۹- میانگین‌پذیری جبرهای نیم‌گروهی ۲۷۱
۹-۱ مقدمه ۲۷۱
۹-۲ میانگین‌پذیری جبرهای نیم‌گروهی تعویض‌پذیر ۲۷۴
۹-۳ میانگین‌پذیری جبرهای نیم‌گروهی ۲۸۴

فصل ۱۰- ثابت میانگین‌پذیری جبرهای نیم‌گروهی ۲۹۹

منابع ۳۱۳

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی ۳۱۹

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۳۲۵

نمایهٔ اشخاص ۳۳۱

نمایهٔ موضوعی ۳۳۳

پیشگفتار چاپ دوم

کتاب میانگین‌پذیری و فشرده‌سازی نیم گروه‌ها اکنون در آستانه چاپ دوم قرار دارد. چاپ اول که در سال ۱۳۹٤ به همت انتشارات دانشگاه تربیت مدرس به زیور طبع آراسته شد، حاصل یک کار گروهی برای بسط و تبیین مطالب کتاب «جبرهای باناخ روی نیم‌گروه‌ها و فشرده‌سازی آنها» از انتشارات انجمن ریاضی آمریکا بود که ضمن امانت‌داری نسبت به متن اصلی کتاب، مطالب تکمیلی نیز برای فهم بیشتر دانشجویان تحصیلات تکمیلی به آن اضافه شد.

نویسندگان کتاب، سه تَن از برجسته‌ترین پژوهشگران شاخه آنالیز هارمونیک و جبرهای باناخ محسوب می‌شوند و اثر ایشان همچنان خواندنی و قابل استفاده است. با توجه به دقت همکاران محترم انتشارات دانشگاه تربیت مدرس چاپ اول از دقت و کیفیت خوبی برخوردار است و در چاپ دوم ضرورتی برای اصلاحات پیش نیامد. در این فرصت مغتنم بار دیگر از این همکاران به‌ویژه سرکار خانم فریبا کرمانی برای پیگیری انتشار چاپ دوم کتاب تقدیر می‌شود.

پیشگفتار چاپ اول*

اثر حاضر حاصل ترجمه و بسط مطالب کتاب «جبرهای باناخ روی نیم‌گروه‌ها و فشرده‌سازی آنها»[1] از مجموعه انتشارات انجمن ریاضی آمریکاست. با توجه به فشردگی مطالب این اثر و ذکر بسیاری از مقدمات و نتایج بدون اثبات در آن و به‌دلیل استفاده بهینه دانشجویان، تلاش شد تا مقدمات لازم و اثبات عمده نتایج از منابع دیگر گردآوری و تدوین شود. در نتیجه اثر حاضر از ترجمه کتاب ذکر شده بسیار فراتر رفته است.

دیلز[2]، لائو[3] و اشتراوس[4] در ۱۳ فصل به بررسی کامل ساختار نیم‌گروه گسستهٔ S، فشرده‌سازی، جبر نیم‌گروهی و میانگین‌پذیری آن پرداخته‌اند، به‌طوری که می‌توان از آن به‌عنوان مرجعی گسترده و بسیار وسیع از آنالیز هارمونیک روی نیم‌گروه‌ها نام بـرد. بـه این ترتیب در کتاب حاضر کوشش شده است تا مطالب ده فصل آغازی کتاب مـذکور پوشش داده شود.

اساس آنالیز روی نیم‌گروه‌ها از کارهای هارولد بور[5] در سال‌های ۱۹۲۵ و ۱۹۲۶

---

* نویسنده اول از قطب ابرساختارهای جبری و کاربردهای آن (CEAHA) در دانشگاه تربیت مـدرس برای پشتیبانی به‌عمل آمده، تشکر می‌نماید.

** نویسندگان از زحمات بی‌دریغ همکاران مرکز نشر آثار علمـی دانشـگاه تربیـت مـدرس (بـه‌ویـژه خانم‌ها آتوما فروهی و فریبا کرمانی) قدردانی می‌نمایند.

1. H. G. Dales, A.T.-M. Lau, D. *Strauss* "Banach Algebras on Semigroups and on their Compactifications", *Memoirs of the American Mathematical Society,* Vol. 205, No. 966, 2010, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. ISSN 0065-9266.
2. H. G. Dales
3. A. T. M. Lau
4. D. Strauss
5. H. Bohr

شروع شده است، زمانی‌که او توابع تقریباً متناوب را روی خط حقیقی سرشت‌نمایی کرد. در سال ۱۹۲۷ بوخنر[1] سرشت‌نمایی تحلیلی از توابع تقریباً متناوب را ارائه داد و سرانجام فون نویمن[2] و بوخنر در ۱۹۳٤ نظریهٔ توابع تقریباً متناوب را روی گروه توپولوژیک دلخواه G توسیع دادند. بالاخره گسترش توابع تقریباً متناوب و فشرده‌سازی به نیم‌گروه‌ها باعث توسعه نیم‌گروه‌های توپولوژیک شد. درواقع تعریف بور از توابع تقریباً متناوب، تعمیمی طبیعی از توابع متناوب است. تعریف و بیان مطالب مقدماتی دربارهٔ توابع تقریباً متناوب ضعیف اولین بار توسط ابرلین[3] در سال ۱۹٤۹ انجام شد. تفاوت‌هایی اساسی بین این دو فضا از توابع وجود دارد. این تفاوت به‌سرعت در فشرده‌سازی‌های مربوط ظاهر گردید. فشرده‌سازی تقریباً متناوب از نیم‌گروه‌ها همواره نیم‌گروه توپولوژیک است، درحالی‌که فشرده‌سازی تقریباً متناوب ضعیف نیم‌گروه‌ها، در حالت کلی، تنها یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک است.

همچنین عمل نیم‌گروه گسسته $(S,0)$ توسیعی طبیعی بر فشرده‌سازی استون- چخ دارد که آن را با β نشان می‌دهند. βS تحت این عمل نیم‌گروه توپولوژیک راست فشرده است که مرکز توپولوژیکی آن شامل S است. عده‌ای از ریاضی‌دانان، به مطالعه نیم‌گروه $(\beta S,\square)$ پرداختند. از این‌رو در اواخر سال ۱۹۵۰ تعریف آن برای اولین بار ارائه شد.

لبگ[4] در سال ۱۹۰٤ برای توسیع انتگرال ریمان، ویژگی‌های آن را برای تابع‌های کراندار و انتگرال‌پذیر در نظر گرفت. سؤال اصلی لبگ این بود که آیا قضیه هم‌گرایی یک‌نوا مستقل از سایر ویژگی‌های انتگرال ریمان است. از این‌رو او تعریف انتگرال برای تابع‌های مشخصه را کافی دانست و به تعریف اندازه رسید. در ۱۹۱٤ هاسدورف[5] سؤال زیر را مطرح کرد: آیا می‌توان به هر مجموعهٔ کراندار $\Re^n$ عددی نامنفی مانند $m(E)$ نسبت داد که

۱) m پایا باشد؛

1. S. Bochner
2. J. Von Neumann
3. W. F. Eberlein
4. Lebesgue
5. Hausdorff

۲) m دارای خاصیت جمعی متناهی باشد؛

۳) m روی مجموعه‌ای مانند E برابر ۱ باشد.

هاسدورف به این مسئله در حالت $n \geq 3$ پاسخ منفی داد که در سال ۱۹۲۳ مورد توجه باناخ[1] قرار گرفت. باناخ نشان داد که جواب حدس هاسدورف به ازای $n = 1,2$ مثبت است. در نتیجه او انتگرال لبگ را به تابعک‌های متناهی جمعی روی تابع‌های کراندار یک یا دو متغیره گسترش داد. از این به بعد مسئله هاسدورف به پارادوکس باناخ- تارسکی[2] معروف شد. در ۱۹۲۹ فون نویمن برهان هاسدورف را مورد مطالعه قرار داد و دریافت که این اختلاف ناشی از ساختار فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ به ازای nهای مختلف نیست بلکه گروه‌های طول‌پایی‌هایی که روی $\mathbb{R}^n$ها عمل می‌کنند، متفاوت هستند. درواقع در حالت $n \geq 3$، این گروه شامل یک زیرگروه آزاد با دو مولد است و در حالت‌های $n = 1,2$ چنین اتفاقی نمی‌افتد. نکتهٔ دیگری که باید به آن توجه داشت این است که قضیهٔ هم‌گرایی یک‌نوا هم‌ارز جمعی شمارایی است ولی باناخ نشان داد که اندازه لبگ تنها اندازه‌ای نیست که متناهی جمعی است. در سال‌های ۱۹٤۰ تا ۱۹۵۷ موضوع گروه و نیم‌گروه‌های میانگین‌پذیر به‌وسیلهٔ دی[3] به‌طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفت. در واقع اصطلاح میانگین‌پذیری توسط دی در ۱۹۵۰ مطرح شد. در ۱۹٦۷ ویلد[4] و ویتس[5] نتایج دی را روی میانگین‌پذیری نیم‌گروه‌ها و ایده‌آل‌های یک نیم‌گروه گسترش دادند. همچنین به مسئله بررسی رابطهٔ میانگین‌های پایای چپ روی $\mathcal{F}_r$ (فضای باناخ همه توابع حقیقی مقدار روی S مجهز به نرم سوپریمم) و ایده‌آل‌های چپ βS (فشرده‌سازی استون- چخ روی S) پرداختند.

فرض کنیم S یک گروه گسسته باشد. جبر نیم‌گروهی روی نیم‌گروه S، $\ell^1(S) = \{f \in C^S : \|f\|_1 = \sum_{s \in S} |f(s)| < \infty\}$ تعریف می‌شود. در گزاره‌های ۱۰.۱.۳ نشان

---

1. Banach
2. Tarski
3. M. M. Day
4. C. O. Wilde
5. K. G. Witz

داده شده است که $\ell^1(S)$ با ضرب پیچشی و $\|\ \|_1$ یک جبر باناخ است. جبرهای نیم‌گروهی پیشینه‌ای قدیمی دارند که به‌عنوان مثال در سال‌های ۱۹۵٦، ۱۹۵۷ و ۱۹۷۵ در (هیوویت[1] و ذاکرمن[2]، ۱۹۵٦؛ دی، ۱۹۵۷؛ بارنز[3] و دانکن[4]، ۱۹۷۵) به این جبرها پرداخته شده است. درحالتی‌که G یک گروه است، $\ell^1(G)$ به‌صورت گسترده‌تری نسبت به $\ell^1(S)$ مورد بررسی قرار گرفته است. برای مثال در (هیوویت و راس[5]، ۱۹۷۹؛ دانکل[6] و رامیرز[7]، ۱۹۷۵) $\ell^1(G)$ به‌خوبی مطالعه شده است. در این کتاب جبر باناخ $\ell^1(S)$، هم‌ریختی‌ها و فضای کاراکترهای آن، عمل‌های مدولی روی دوگان آن، میانگین‌پذیری و ثابت میانگین‌پذیری آن بررسی شده است که در واقع هدف بررسی ویژگی‌های $\ell^1(S)$ و رسیدن به یک شرط معادل برای میانگین‌پذیری آن است.

در اینجا به‌طور خلاصه روند کلی کتاب مرور می‌شود. در فصل اول طی شش بخش، مقدمات مورد نیاز فصل‌های بعدی ذکر می‌شود. برای تدوین مطالب بخش جبرهای باناخ و میانگین‌پذیری آن نیز به‌طور عمده از (دیلز، ۲۰۰۰؛ رونده[8]، ۲۰۰۲؛ کلیفورد[9] و پترسون[10]، ۱۹٦۱، ۱۹٦٤) استفاده شده است.

در فصل دوم تعدادی از نیم‌گروه‌ها معرفی شده و ویژگی‌های پایه‌ای آنها بیان می‌شود، به‌عنوان مثال در مورد نیم‌گروه‌های ریس، حذفی، کاملاً o- ساده و توپولوژیک (فشرده) و ساختار این نیم گروه‌ها بحث می‌شود. همچنین نتایجی نیز درباره زیرمجموعه‌های تقریباً جدا ازهم چپ یک نیم‌گروه ثابت می‌شوند. این فصل با مجموعه‌ای از مثال‌های نیم‌گروه‌ها به پایان می‌رسد. مرجع‌های اصلی این فصل (برگلند[11] و همکاران، ۱۹۸۹؛ کلیفورد و

1. E. Hewitt
2. H.S. Zukerman
3. B.A. Barnes
4. J. Duncan
5. K.A. Ross
6. C.F. Dunkl
7. D.E. Ramirez
8. V. Runde
9. A.H. Clifford
10. G.B. Paterson
11. J.F. Berglund

پترسون، ۱۹۶۱، ۱۹٦٤؛ هیندمن[1] و اشتراوس[2]، ۱۹۹۸؛ هووی، ۱۹۹۵) هستند.

در فصل سوم $\ell^1(S)$ و فضای مشخصه‌های آن بررسی می‌شوند. در اینجا بـه نتـایج مهمی که در این باره به‌دست آمده است، اشاره می‌شود. هیوویت و ذاکرمن (هیوویت و ذاکرمن، ۱۹۵٦) برای یک نیم‌گروه آبلی s ثابت کردند $\ell^1(S)$ یکانی اسـت اگـر و تنهـا اگر s یک مجموعهٔ متناهی از یکـه‌هـای نسـبی را داشـته باشـد (گـزاره‌هـای ۱۷.۱.۳). همچنین یک مثال از $\ell^1(S)$ای یکانی یافتند که S همانی ندارد (مثـال‌هـای ۱۸.۱.۳). در گزاره‌های ۲۱.۱.۳ مشاهده می‌شود که دیلز، لائو و اشتراس نشان داده‌اند که اگـر $\ell^1(S)$ یک یکهٔ تقریبی چپ و یک یکهٔ تقریبی راست داشته باشـد و بـرای یـک زیرمجموعـهٔ متناهی از S مانند F، $S=\bigcup\{pSq : p,q\in F\}$، آن‌گاه $\ell^1(S)$ یکانی است. با استفاده از این گزاره در فصل چهارم ثابت می‌شود که اگـر $\ell^1(S)$ میـانگین‌پـذیر باشـد، آن‌گـاه یکانی است (گزاره‌های ۷.۳.۹). همچنـین از نتـایج مهـم بخـش مشخصـه‌هـای $\ell^1(S)$ می‌توان به گزاره‌های ۱۰.۲.۳ اشاره کرد که نشان می‌دهد فضای نیم‌مشخصـه‌هـای یـک نیم‌گروه با فضای مشخصه‌های جبر نیم‌گروهی آن همسـان‌ریخـت اسـت. جبـر فوریـهٔ $\ell^1(S)$ که با $A(\Phi_S)$ نمایش داده می‌شود، یک جبر تابعی باناخ روی فضـای موضـعی فشردهٔ Φ_S است که به‌طور لزوم منظم نیست. در حالتی‌که G یک گروه است، $A(\Phi_G)$ مـنظم و در $C(\Phi_G)$ چگـال اسـت و اگـر N یـک زیرگـروه جابـه‌جـاگر G باشـد، $A(\Phi_{\frac{G}{N}})=A(\Phi_G)$. همچنـین دانکـل و رامیـرز (دانکـل و رامیـرز، ۱۹۷۵) بـرای یـک نیم‌گروه آبلی نشان دادند که $\ell^1(S)$ نیم‌ساده است اگر و تنها اگر فضای نیم‌مشخصه‌های S نقاط S را جدا کند (گزاره‌های ۱۲.۳.۳).

در فصل چهارم نخست عمل‌هـای مـدولی روی دوگـان $\ell^1(S)$ معرفـی و حاصـل ضرب تانسوری تصویری دو جبر نیم‌گروهی شناخته می‌شود. همچنـین در گـزاره‌هـای ۱٤.۱.٤ تحت شرایط خاصی نشان داده می‌شود که برای یک انـدازهٔ بـورل مـنظم روی

1. N. Hindman
2. D. Strauss

نیم‌گروه توپولوژیک راست فشردهٔ V مانند μ، $(\upsilon \in V)\|R_\upsilon \mu\| = \|\mu\|$. دیلز و همکاران (دیلز و همکاران، ۲۰۱۰) نشان دادند که $\ell^1(S)$ جبر باناخ دوگان نسبت $c_0(S)$ است اگر و تنها اگر S حذفی ضعیف باشد (گزاره‌های ۱۷.۱.٤).

در بخش دوم این فصل جبر نیم‌گروهی ریس معرفی می‌شود که یک مثال مهم و کاربردی در جبرهای نیم‌گروهی به حساب می‌آید. روی نرم یکهٔ این جبرها محاسباتی انجام شده که نتایج جالبی از آنها به‌دست آمده است. از جمله اینکه ممکن است نرم یکهٔ یک جبر نیم‌گروهی عددی طبیعی نباشد و یا حتی یکهٔ آن محمل نامتناهی داشته باشد (مثال‌های ۹.۲.٤ و ۱۰.۲.٤).

در فصل پنجم مفهوم فشرده‌سازی نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک بررسی شده است. این فشرده‌سازی تحت ویژگی P مطالعه شده است تا به بیان واضحی از $P-$ فشرده‌سازی جهانی نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک S رسیده است. قضیهٔ بنیادی وجود $P-$ فشرده‌سازی نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک S به‌عنوان نتیجهٔ فصل پنجم بیان شده است. سپس ویژگی مورد نظر به اتحادها و استلزام‌ها تعمیم داده شده است.

در فصل ششم فشرده‌سازی استون- چخ نیم‌گروه مورد توجه است. این فشرده‌سازی با استفاده از تعریف فرافیلترها مطرح شده است. توصیف βS به‌عنوان فضایی از فرافیلترها اولین بار توسط الیس[1] بر گروه S انجام شد. βS با ضرب‌های آرنز بر S ساختار نیم‌گروهی پیدا می‌کند. برخی ویژگی‌ها و قضایا دربارهٔ نیم‌گروه βS در این فصل آمده است.

در فصل هفتم با فرض اینکه S یک نیم‌گروه و G گروه موضعی فشرده باشد، برخی از C^*-زیرجبرهای درونی مطالعه شده‌اند. همچنین به معرفی $WAP(S)$ و $AP(S)$ و همچنین فضاهای $WAP(G)$، $AP(G)$، $LUC(G)$ و $RUC(G)$ پرداخته شده است. فضای مشخصه‌های آنها به‌عنوان فشرده‌سازی S و G معرفی و بررسی شده‌اند.

در فصل هشتم برای نیم‌گروه گسستهٔ S، دوگان دوم $\ell^1(S)^{"}$، یعنی $M(\beta S)$ مطالعه می‌شود که همان جبر باناخ است. در این فصل میانگین‌پذیری نیم‌گروه‌ها مطرح

1. R. Ellis

می‌شوند. به این ترتیب که میانگین‌های پایای چپ روی S به‌عنوان اعضای فضای $M(\beta S)$ در نظر گرفته می‌شود. در اینجا نشان داده می‌شود که میانگین‌پذیری $(\beta S, \square)$، میانگین‌پذیری S را نتیجه می‌دهد. با فرض اینکه S یک نیم‌گروه نامتناهی و حذفی ضعیف چپ باشد، ثابت می‌شود βS میانگین‌پذیر راست نیست. همچنین نشان داده می‌شود اگر S یک نیم‌گروه نامتناهی و حذفی باشد، آن‌گاه βS میانگین‌پذیر چپ نیست. در ادامه به بحث در مورد نیم‌گروه‌های به غایت میانگین‌پذیر چپ پرداخته می‌شده و نشان داده می‌شود که دو نتیجه اخیر برای هر نیم‌گروه نامتناهی دلخواه برقرار نیست.

در این فصل برخی ویژگی‌های محمل‌های میانگین‌ها و میانگین‌های پایای چپ روی S بررسی می‌شوند. درحالتی‌که S یک نیم‌گروه حذفی و نامتناهی و μ یک میانگین پایای چپ S باشد، ثابت می‌شود $\mu \in M_c(S^*)$ و نشان داده می‌شود که شرط حذفی بودن درنتیجهٔ اخیر را نمی‌توان با حذفی چپ یا حذفی ضعیف جایگزین کرد. همچنین درحالتی‌که S یک نیم‌گروه میانگین‌پذیر چپ است، به بررسی رابطهٔ بین ایده‌آل مینیمم βS و $supp\ \mu$ پرداخته می‌شود. در بخش پایانی این فصل با فرض اینکه نیم‌گروه $(\mathbb{N}, +)$ و μ میانگین پایای چپ $\mathbb{N}$ است، به بررسی ویژگی‌های محمل‌های میانگین‌های پایای چپ و رابطهٔ بین ایده‌آل مینیمم $\beta\mathbb{N}$ و $supp\ \mu$ پرداخته می‌شود. همچنین ثابت می‌شود زیرفضای بستهٔ $\overline{M(K(\beta\mathbb{N}))}$ یک ایده‌آل چپ $(M(\beta\mathbb{N}), \square)$ است اما ایده‌آل راست آن نیست. در پایان این فصل برای نیم‌گروه آبلی، حذفی و نامتناهی S نشان داده می‌شود که خودتوان‌های S^* عضو $\overline{L(\beta S)}$ نیستند. مرجع‌های اصلی این فصل (برگلند و همکاران، ۱۹۸۹؛ دی، ۱۹۵۷؛ کلاو[1]، ۱۹۷۷؛ پترسون، ۱۹۸۸؛ رونده، ۲۰۰۲) هستند.

در فصل نهم میانگین‌پذیری بررسی می‌شود و هدف این است شرطی معادل برای میانگین‌پذیری $\ell^1(S)$ پیدا شود. در حالتی که G یک گروه باشد، $\ell^1(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد (قضیهٔ ۱.۱.۹ (جانسون[2])). خواهیم دید که

1. M. Klawe
2. B. E. Johnson

برای یک نیم‌گروه S این قضیه برقرار نیست (مثال‌هایی ٤.١.٩). ازاین‌رو همیشه رویکرد به سمت نزدیک شدن به قضیهٔ جانسون بوده است. دانکن[1] و نامیوکا[2] در سال ١٩٧٨ نشان دادند که برای نیم‌گروه وارون S که تعداد متناهی عضو خودتوان دارد، $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرگروه ماکسیمال S میانگین‌پذیر باشد (دانکن و نامیوکا، ١٩٧٨: قضیهٔ ٨). گرونبک[3] در سال ١٩٩٠ برای یک نیم‌گروه آبلی S ثابت کرد که $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر S نیم‌مشبکه‌ای از زیرگروه‌های میانگین‌پذیر خود باشد (قضیهٔ ١٩.٢.٩). دانکن و پترسون[4] در سال ١٩٩٠ ـ همان‌طور که در آخرین پاراگراف (دانکن و پترسون، ١٩٩٠) بیان می‌کنند ـ نتوانستند برای حالتی‌که S یک نیم‌گروه دلخواه است روش دانکن و نامیوکا را در (دانکن و نامیوکا، ١٩٧٨) به کار گیرند تا شرطی معادل برای میانگین‌پذیری $\ell^1(S)$ به‌دست آورند. ازاین‌رو اینکه چه وقت $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر است به یک سؤال باز تبدیل شد که بالاخره دیلز، (دیلز و همکاران، ٢٠١٠) به این سؤال پاسخ دادند. آنها نشان دادند که $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر است، اگر و تنها اگر S از گروه‌های میانگین‌پذیر ساخته شده باشد. در قضیهٔ ١٧.٣.٩ به‌طور دقیق این موضوع بررسی می‌شود.

در فصل دهم فرض می‌کنیم $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر است و ثابت میانگین‌پذیری آن را با C_S نمایش می‌دهیم. استوک[5] در سال ٢٠٠٤ در (استوک، ٢٠٠٤) نشان داد که اگر $C_S <$ ٢ ، آن‌گاه S یک گروه است. دیلز، لائو و اشتراس در (دیلز و همکاران، ٢٠١٠) این تخمین را بهبود بخشیدند و نشان دادند که اگر $C_S <$ ٥، S یک گروه است. همچنین ثابت میانگین‌پذیری چند جبر نیم‌گروهی را نیز محاسبه کردند.

دکتر سید مسعود امینی، دکتر علیرضا مدقالچی

معصومه چراغی، سیده‌زهرا رضوی و علی معمارهمدانی

---

1. J. Duncan
2. I. Namioka
3. N. Grønbæk
4. A. L. T. Paterson
5. R. Stokke